VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL
FACULTEIT TOEGEPASTE WETENSCHAPPEN
ANALYTISCHE MECHANICA I
Tentamen 1ste Kandidatuur Burgerlijk Ingenieur
Academiejaar 2001-2002
9 januari 2002

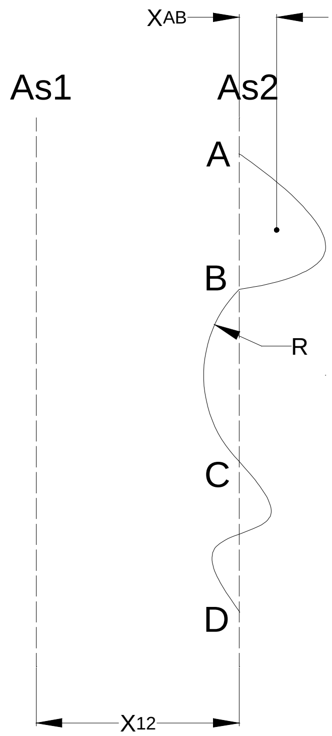
<u>Vraag 1:</u> (Theorie)

Stel de algemene uitdrukking voor het evenwicht van een star lichaam op in geval van de methode van de virtuele arbeid.

Druk vervolgens deze evenwichtsvoorwaarde uit in veralgemeende Lagrangecoördinaten.

(Geef duidelijk aan welke onderstellingen/beperkingen er gelden. Voorzie vectoren van vectorstrepen!)

Vraag 2:



In bovenstaande figuur is een **homogene** boog **ABCD** weergegeven. Deze boog bestaat uit volgende drie delen:

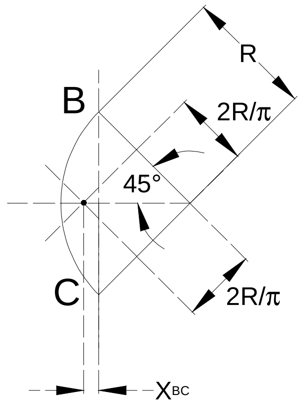
- het stuk **AB**, waarvan de vorm conform is aan de figuur
- het stuk **BC** is een kwart cirkelboog
- het stuk **CD**, waarvan de vorm eveneens conform is aan de figuur

Bereken de lengte van de boog CD a.d.h.v. volgende gegevens:

- $\mathbf{S_{ABCD}}$: het **omwentelingsoppervlak** dat men verkrijgt door boog **ABCD** te omwentelen rond de vertikale **As1**
- $\mathbf{V_{ABCD}}$: het **omwentelingsvolume** dat men verkrijgt door boog **ABCD** te omwentelen rond de vertikale **As1**
- $\mathbf{S_{AB}}$: het **omwentelingsoppervlak** dat men verkrijgt door boog **AB** te omwentelen rond de vertikale **As2**
- $\mathbf{V_{CD}}$: het **omwentelingsvolume** dat men verkrijgt door boog **CD** te omwentelen rond de vertikale **As2**
- **R** : de straal van de kwart cirkelboog
- $\mathbf{X_{12}}$: de horizontale afstand tussen beide assen
- $\mathbf{X_{AB}}$: de horizontale afstand tussen **As2** en het massamiddelpunt van boog **AB**
- Het massamiddelpunt van boog **CD** ligt op de vertikale **As2**

__**Vraag 2 (oplossing)**__

Eerst zoeken we de horizontale component van het massamiddelpunt van de kwart cirkel **BC**



$$X_{BC} = 2\sqrt{2}\,\frac{R}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

Lengte boog AB bekomt men uit het omwentelingsoppervlak $\mathbf{S_{AB}}$ van boog **AB** rond $\mathbf{AS_2}$:

$$S_{AB} = 2\pi L_{AB} X_{AB} \Rightarrow L_{AB} = \frac{S_{AB}}{2\pi X_{AB}} \qquad \text{(stelling van guldin)}$$

Omwentelingsoppervlak $\mathbf{S_{ABCD}}$ van boog **ABCD** rond $\mathbf{AS_1}$ wordt:

$$S_{ABCD} = 2\pi(L_{AB} + L_{CD} + \frac{\pi R}{2})X_G \qquad \text{(stelling van guldin)}$$

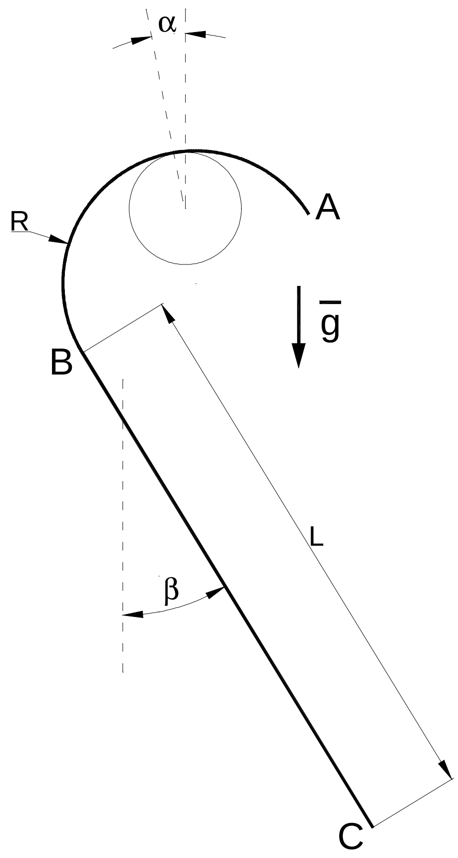
Met $\mathbf{X_G}$ het totale massamiddelpunt van boog **ABCD** t.o.v. $\mathbf{AS_1}$:

$$X_G = X_{12} + \frac{L_{AB}X_{AB} - \frac{\pi R}{2}X_{BC} + L_{CD}.0}{L_{AB} + \frac{\pi R}{2} + L_{CD}}$$

De drie vergelijkingen gecombineerd geeft:

$$\begin{aligned} L_{CD} &= \frac{1}{X_{12}}\left(\frac{S_{ABCD}}{2\pi} - L_{AB}X_{12} - L_{AB}X_{AB} - \frac{\pi R}{2}(X_{12} - X_{BC})\right) \\ &= \frac{1}{X_{12}}\left(\frac{S_{ABCD}}{2\pi} - \frac{S_{AB}}{2\pi X_{AB}}(X_{12} - X_{AB}) - \frac{\pi R}{2}(X_{12} - \sqrt{2}R(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}))\right) \end{aligned}$$

Vraag 3:



Bovenstaand stelsel **ABC** bestaat uit:

- een homogene gladde halve cirkel met straal **R**
- een lijnstuk **BC** met lengte **L**, dat in **B** tangentiaal verbonden is met de halve cirkel

Beide delen hebben dezelfde soortelijke massa ρ (kg/m).

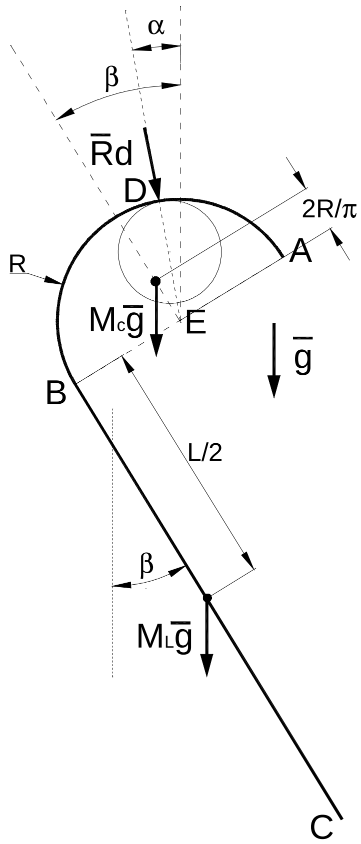
Dit geheel wordt in het zwaarteveld (**g**) opgehangen aan een gladde ronde staaf. De staaf staat loodrecht op het vlak waarin het stelsel **ABC** zich bevindt.

Alle bindingen zijn glad!

α beschrijft de hoek tussen enerzijds de rechte gaande door het contactpunt van de halve cirkel met de staaf en het middelpunt van de projectie van de staaf in het vlak van **ABC** en anderzijds de vertikale.
β beschrijft de hoek tussen **BC** en de vertikale.

Bepaal met het uitdrukken van de evenwichtsvoorwaarden ($\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{0},\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$) zowel de evenwichtswaarden van de hoeken α en **β,** als de grootte van de reaktiekracht in de staaf en dit in functie van **R** en **L**.

Vraag 3 (oplossing):



De reaktiekracht $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{D}}$ gaat door het middelpunt E van de halve cirkel vanwege de gladde binding.
En:

$$\mathbf{M_C = \pi R \rho g}$$

$$\mathbf{M_L = L \rho g}$$

Uitdrukken van het evenwicht geeft:

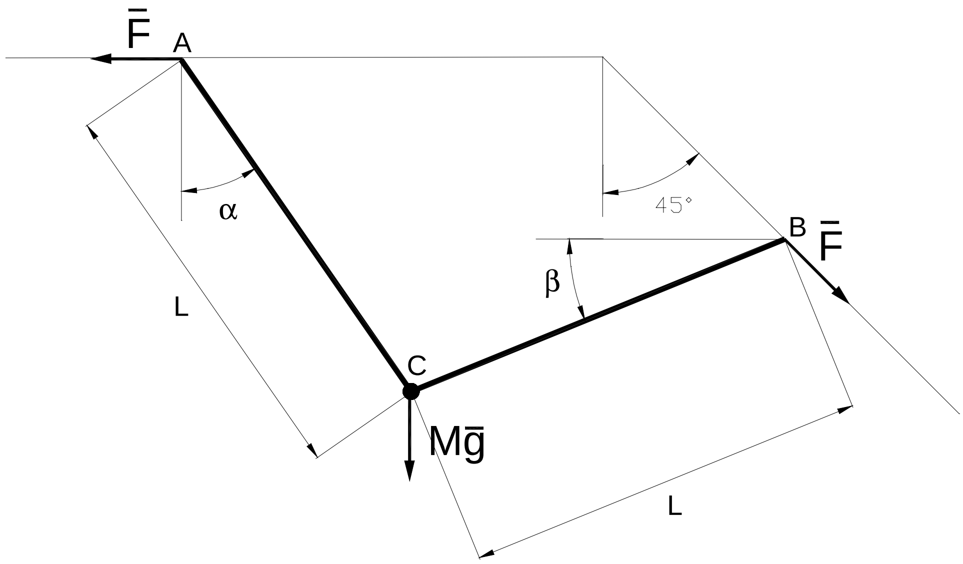
$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}: \qquad \begin{cases} \mathbf{R_D \sin\alpha = 0} \\ \mathbf{R_D \cos\alpha + \pi R \rho g + L \rho g = 0} \end{cases}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \text{ (t.o.v. } \mathbf{E}\text{)}: \quad \mathbf{\pi R \rho g \frac{2R}{\pi} \sin\beta - L \rho g(\frac{L}{2} \sin\beta - R\cos\beta) = 0}$$

hieruit volgt :

$$\begin{cases} \mathbf{\alpha = 0} \\ \mathbf{R_D = -\rho g(\pi R + L)} \\ \mathbf{(2R^2 - \frac{L^2}{2}) \sin\beta + LR\cos\beta = 0} \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{tg\beta = \frac{2LR}{L^2 - 4R^2}}$$

Vraag 4:



Bovenstaand mechanisme bestaat uit twee **massaloze** staven **AC** en **BC**, beide met lengte **L**. In het punt **C** zijn de staven onderling verbonden door middel van een scharnier. Het punt **A** van de staaf **AC** wordt door een **gladde** roloplegging gedwongen op een horizontale rechte te blijven terwijl het punt **B** van de staaf **BC** op dezelfde manier gedwongen wordt op een rechte onder een hoek van **45°** met de vertikale te blijven.

Zowel in **A** als **B** werkt een kracht $\bar{\mathbf{F}}$ met dezelfde grootte en telkens gericht volgens de rechte waar de respectievelijke punten worden gedwongen op te blijven. In punt **C** hangt een massa **M** die in het zwaarteveld een kracht $\mathbf{M\bar{g}}$ veroorzaakt.

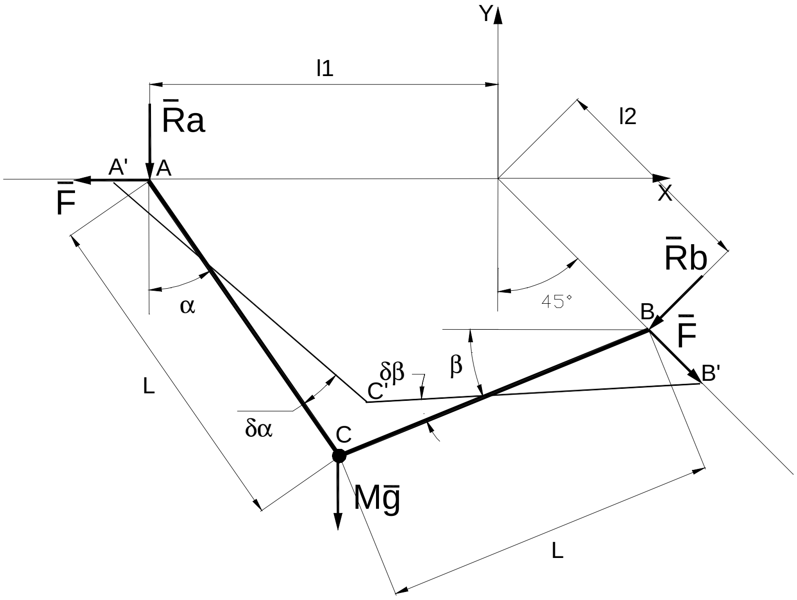
α beschrijft de hoek tussen staaf **AC** en de vertikale.
β beschrijft de hoek tussen **BC** en de horizontale.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden van het systeem.
2. Duidt de reaktiekrachten aan in **A** en **B**.
3. Bepaal met de methode van de virtuele arbeid de evenwichtswaarden van de hoeken α en β in functie van **F**, **M** en **g**.
4. Bepaal met de methode van de virtuele arbeid de reaktiekrachten in **A** en **B** bij evenwicht.

Hint: Extra lagrangecoördinaten invoeren kan nuttig zijn.

<u>Vraag 4 (oplossing):</u>



1 <u>Aantal vrijheidsgraden:</u> 6-2-1-1=2 vrijheidsgraden

2 <u>Reaktiekrachten:</u> zie tekening

3 <u>Evenwichtspositie:</u>

We voeren een virtuele verplaatsing uit die de bindingen respecteert (zie tekening)
De arbveidvergelijking bij evenwicht wordt dan:

$$\overline{\mathbf{F}}\,.\,\overline{\mathbf{AA'}} + \overline{\mathbf{F}}\,.\,\overline{\mathbf{BB'}} + \mathbf{M}\,\overline{\mathbf{g}}\,.\,\overline{\mathbf{CC'}} = \mathbf{0}$$

We voeren twee extra lagrangecoördinaten in : l1 en l2
En:

$$\mathbf{OC_Y = -L\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad CC' = \delta OC_Y = L\sin\alpha\delta\alpha}$$

Uitwerking van de scalaire producten geeft:

$$\mathbf{F\delta l1 + F\delta l2 - MgL\sin\alpha\delta\alpha = 0}$$

Bindingen:

$$\mathbf{\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, l2 = L\cos\alpha - L\sin\beta}$$

$$\mathbf{l1 = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, l2 + L\cos\beta + L\sin\alpha}$$

$$\mathbf{= -L\cos\alpha + L\sin\beta + L\cos\beta + L\sin\alpha}$$

We krijgen dus:

$$\mathbf{F(L\sin\alpha\delta\alpha + L\cos\beta\delta\beta - L\sin\beta\delta\beta + L\cos\alpha\delta\alpha)}$$

$$\mathbf{+F(-\tfrac{2}{\sqrt{2}}L\sin\alpha\delta\alpha - \tfrac{2}{\sqrt{2}}L\cos\beta\delta\beta) - MgL\sin\alpha\delta\alpha = 0}$$

Groeperen volgens $\delta\alpha$ en $\delta\beta$ geeft:

$$\mathbf{\left(\left((1-\sqrt{2})FL - MgL\right)\sin\alpha + FL\cos\alpha\right).\delta\alpha}$$

$$\mathbf{+\left((1-\sqrt{2})FL\cos\beta - FL\sin\beta\right).\delta\beta = 0}$$

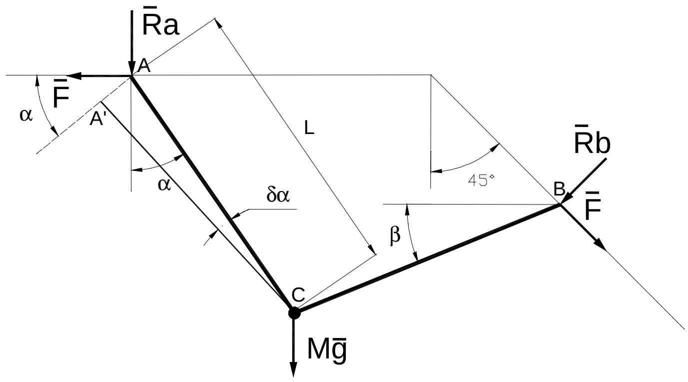
$\delta\alpha$ en $\delta\beta$ zijn willekeurig klein dus geldt:

$$\begin{cases} \left((1-\sqrt{2})FL - MgL\right)\sin\alpha + FL\cos\alpha = 0 \\ (1-\sqrt{2})FL\cos\beta - FL\sin\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{F}{(\sqrt{2}-1)F + Mg} \\ tg\beta = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

4 <u>waarden van de reaktie krachten:</u>

R_A: laat staaf AC draaien rond punt C



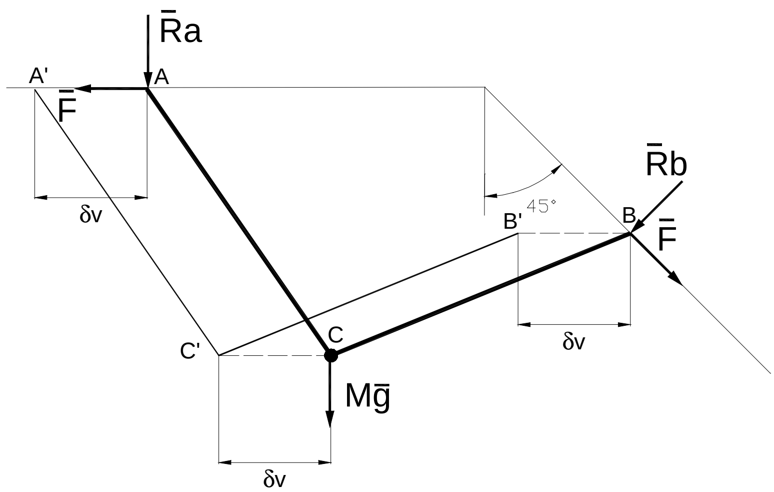
Arbeidsvergelijking bij evenwicht wordt:

$$\overline{R}_A.\overline{AA'} + \overline{F}.\overline{AA'} = 0$$

In de limiet staat AA' loodrecht op AC, zodat de uitwerking (volgens de definitie) van de scalaire producten hetvolgende geeft:

$$R_A L\sin\alpha\delta\alpha + FL\cos\alpha\delta\alpha = 0$$
$$\Rightarrow R_A = -F\cot g\alpha = (1-\sqrt{2})F - Mg$$

R_B: horizontale verschuiving van het stelsel



Arbeidsvergelijking bij evenwicht wordt:

$$\overline{F}.\overline{AA'} + \overline{F}.\overline{BB'} + \overline{R}_B.\overline{BB'} = 0$$

Uitwerking van de scalaire producten geeft:

$$\mathbf{F\delta v} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{R_B\delta v} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{F\delta v} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R_B} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\mathbf{F}$$