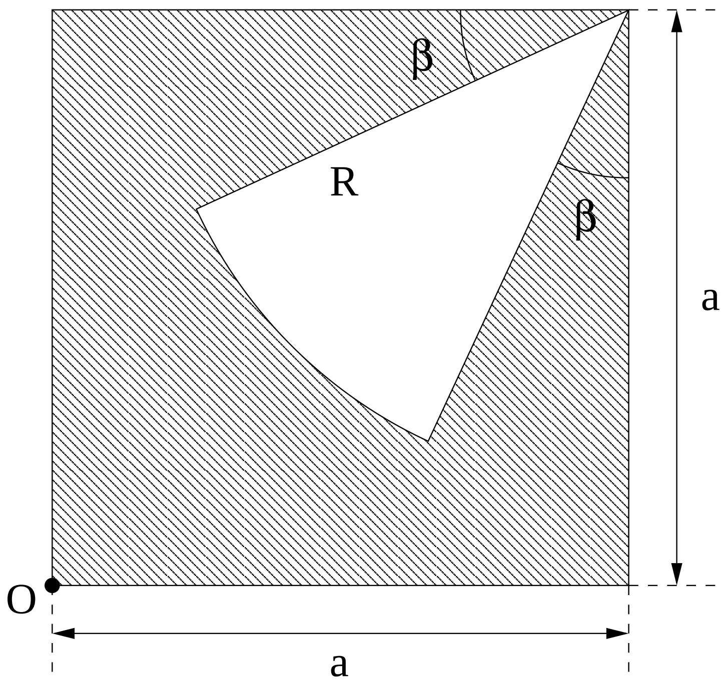
VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL
FACULTEIT TOEGEPASTE WETENSCHAPPEN
MECHANICA

Examen 1e kandidatuur
Burgerlijk Ingenieur-Architect

Academiejaar 2002-2003
Zaterdag 21 juni 2003

Vraag 1

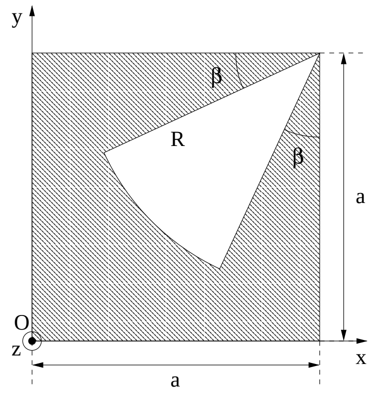


Bovenstaand voorwerp werd gevormd door uit een vlakke vierkante plaat met zijde a een cirkelsector met straal $R < a$ te snijden (zie figuur). Het gebruikte materiaal heeft als soortelijke massa $\rho \left[\frac{kg}{m^2}\right]$.

Het voorwerp roteert met hoeksnelheid ω om een as door O en loodrecht op het vlak van de plaat.

Bepaal de *kinetische energie*.

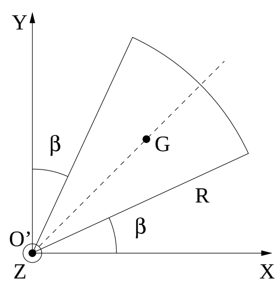
Oplossing



- Kinetische energie: $E_k = \frac{1}{2} I_{z,O} \omega^2$ (O is een vast punt). We moeten dus $I_{z,O}$ berekenen, met $I_{z,O} = I_{z,0}^{\text{plaat}} - I_{z,0}^{\text{csector}}$.
- Steiner:

$$
\begin{aligned}
I_{z,0}^{\text{plaat}} &= I_{z,G_p}^{\text{plaat}} + m_p \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right) \\
&\Downarrow \ \text{Tabel: } I_{z,G_p}^{\text{plaat}} = m_p \frac{a^2}{6} \\
I_{z,0}^{\text{plaat}} &= \frac{2}{3} m_p a^2
\end{aligned}
$$

met $m_p = \rho a^2$.



- Massa cirkelsector:

$$
m_c = \rho \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta} \int_0^R r dr d\theta = \rho \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right)
$$

- Massamiddelpunt cirkelsector:

$$\begin{aligned} x_G = y_G &= \frac{\rho}{m_c}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta}\int_0^R r\cos\theta\cdot r dr d\theta \\ &= \frac{\rho}{m_c}\frac{R^3}{3}\left[\sin\theta\right]_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta} \\ &= \frac{\rho R^3}{3m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right) \end{aligned}$$

- Traagheidsmoment:

$$\begin{aligned} I_{Z,O'}^{\text{csector}} &= \rho\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}-\beta}\int_0^R r^2\cdot r dr d\theta \\ &= \frac{\rho R^4}{4}\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) \\ &= \frac{R^2}{2}m_c \end{aligned}$$

Steiner:

$$\begin{aligned} I_{Z,G}^{\text{csector}} &= I_{Z,O'}^{\text{csector}} - m_c\left(x_G^2+y_G^2\right) \\ &= \frac{R^2}{2}m_c - \frac{2\rho^2R^6}{9m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right)^2 \end{aligned}$$

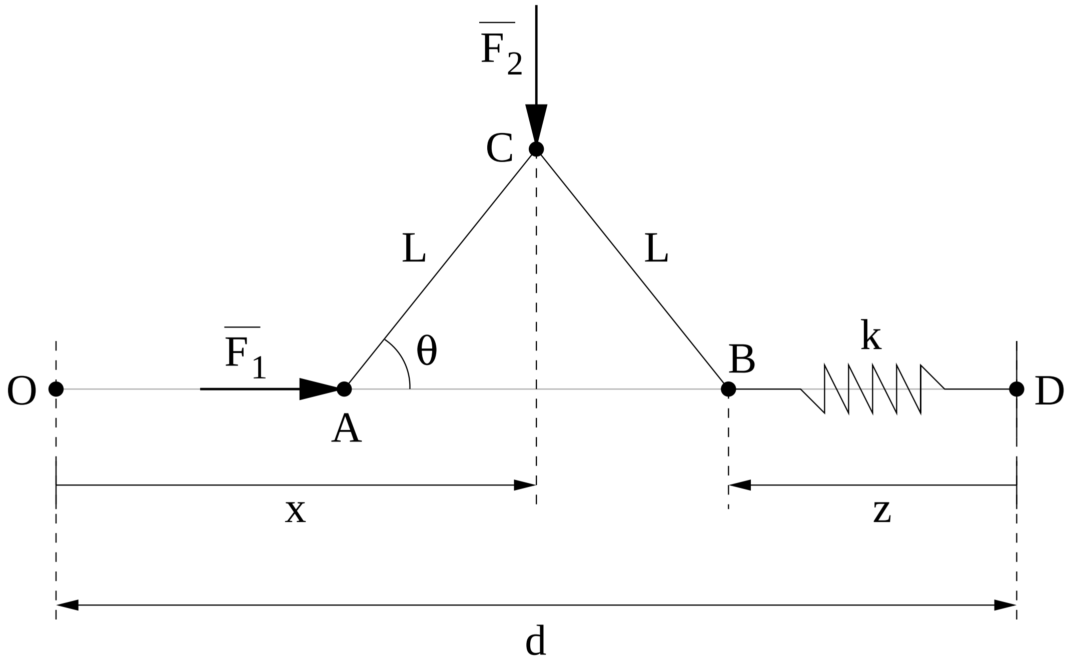
Steiner opnieuw toepassen levert het traagheidsmoment van de cirkelsector ten opzichte van een as door O:

$$\begin{aligned} I_{z,O}^{\text{csector}} &= I_{Z,G}^{\text{csector}} + m_c\left(\sqrt{2}a-\sqrt{2}x_G\right)^2 \\ &= \frac{R^2}{2}m_c - \frac{2\rho^2R^6}{9m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right)^2 + 2m_c\left(a-\frac{\rho R^3}{3m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right)\right)^2 \end{aligned}$$

- We vinden dus:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\left(I_{z,0}^{\text{plaat}} - I_{z,0}^{\text{csector}}\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_p a^2 - \frac{R^2}{2}m_c + \frac{2\rho^2R^6}{9m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right)^2 - 2m_c\left(a-\frac{\rho R^3}{3m_c}\left(\cos\beta-\sin\beta\right)\right)^2\right)\omega^2 \end{aligned}$$

Vraag 2



Twee massaloze staven met lengte L zijn in C scharnierend met elkaar verbonden (wrijvingsloze scharnier). In A en B bevinden zich gladde bindingen met een horizontale vloer. Tussen B en D bevindt zich een massaloze lineaire veer met veerconstante k en rustlengte d (aangegeven op de tekening).

In A grijpt een horizontale kracht $\mathbf{F_1}$ aan, in C een vertikale kracht $\mathbf{F_2}$.

x beschrijft de horizontale afstand tussen punten O en C. θ is de hoek tussen staaf AC en de horizontale. z beschrijft de horizontale afstand tussen D en B.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden n van het systeem.

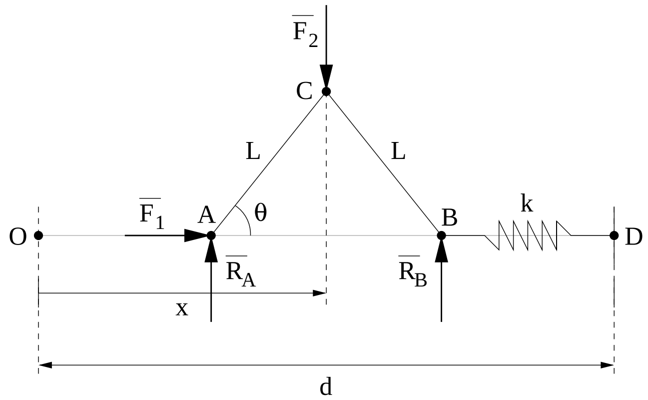
2. Bepaal met een methode naar keuze (evenwichtsvergelijkingen $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{C} = 0$ of virtuele arbeid) een expliciete uitdrukking voor de eerste n elementen uit $\{\theta, x, z, d, L\}$ bij evenwicht. Vermeld duidelijk welke methode je gebruikt!

Hint:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \text{ voor } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Oplossing

1. Er zijn 2 vrijheidsgraden.
2. Oplossing met evenwichtsvergelijkingen:



Horizontaal evenwicht:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{\text{veer}} \\ &= k(x + L\cos\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

Vertikaal evenwicht:

$$F_2 = R_A + R_B$$

Totaal moment in A nul stellen geeft:

$$\begin{aligned} 2R_B L\cos\theta - F_2 L\cos\theta &= 0 \\ &\Downarrow \ \theta \neq \frac{\pi}{2} \\ R_B &= \frac{F_2}{2} \\ &\Downarrow \ F_2 = R_A + R_B \\ R_A &= \frac{F_2}{2} \end{aligned}$$

Scharnier C kan geen moment opvangen. Het moment van alle krachten die aan één kant ervan aangrijpen moet in C dus nul zijn. We kiezen bv. de linkerkant:

$$\begin{aligned} F_1 L\sin\theta - R_A L\cos\theta &= 0 \\ &\Downarrow \ R_A = F_2/2 \\ \tan\theta &= \frac{F_2}{2F_1} \end{aligned} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) vinden we:

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_1}{k} - L\cos\theta \\ &= \frac{F_1}{k} - L\sqrt{\frac{1}{1+\frac{F_2^2}{4F_1^2}}} \end{aligned} \tag{3}$$

(2) en (3) zijn de gevraagde evenwichtsvergelijkingen.

Oplossing met virtuele arbeid:

$$\begin{aligned} OA_x &= x - L\cos\theta \\ &\Downarrow \\ \delta OA_x &= \delta x + L\sin\theta\delta\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OB_x &= x + L\cos\theta \\ &\Downarrow \\ \delta OB_x &= \delta x - L\sin\theta\delta\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OC_y &= L\sin\theta \\ &\Downarrow \\ \delta OC_y &= L\cos\theta\delta\theta \end{aligned}$$

Arbeidsvergelijking:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot \delta OA_x - F_{\text{veer}} \cdot \delta OB_x - F_2 \cdot \delta OC_y &= 0 \\ &\Downarrow \\ F_1\left(\delta x + L\sin\theta\delta\theta\right) - k\left(x + L\cos\theta\right)\left(\delta x - L\sin\theta\delta\theta\right) - F_2 L\cos\theta\delta\theta &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit vinden we (coëfficiënt van δx nul stellen)

$$F_1 = k\left(x + L\cos\theta\right) \tag{4}$$

en (coëfficiënt van $\delta\theta$ nul stellen en gebruik maken van bovenstaande betrekking voor F_1)

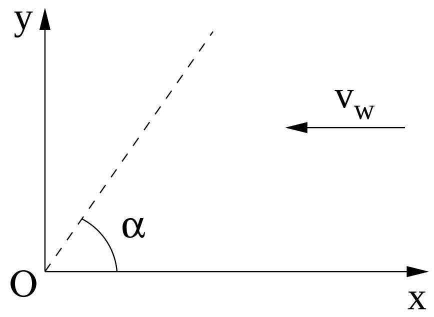
$$\begin{aligned} 2F_1 L\sin\theta - F_2 L\cos\theta &= 0 \\ &\Downarrow \\ \tan\theta &= \frac{F_2}{2F_1} \end{aligned} \tag{5}$$

Uit (4) en (5) vinden we

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{F_1}{k} - L\cos\theta \\
&= \frac{F_1}{k} - L\sqrt{\frac{1}{1+\frac{F_2^2}{4F_1^2}}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(5) en (6) zijn de gevraagde evenwichtsvergelijkingen.

Vraag 3



Een stoffelijk punt met massa m bevindt zich in rust in de oorsprong O van assenstelsel $\{x, y\}$. Op $t = 0$ wordt het vanuit O met beginsnelheid v_0 weggeschoten onder een hoek $\alpha < \frac{\pi}{2}$ met de horizontale.

Het punt bevindt zich in het zwaarteveld (valversnelling $\mathbf{g}$).

Er waait een wind met constante windsnelheid $\mathbf{v_w} = -v_w \mathbf{1_x}$.

Het punt ondervindt lineaire luchtweerstand met evenredigheidsfactor $\lambda \left[\frac{N}{m/s}\right]$.

Gevraagd:

1. Stel de bewegingsvergelijking(en) op.
2. Bepaal de positie van het punt als functie van de tijd.
3. Op welk tijdstip bereikt het punt zijn maximale hoogte?

Oplossing

1. Bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda\left(\dot{x}+v_w\right) \\ &= -\lambda\dot{x}-\lambda v_w \\ m\ddot{y} &= -\lambda\dot{y}-mg \end{aligned}$$

2. Beide bewegingsvergelijkingen hebben dezelfde vorm, nl.

$$m\ddot{z}+\lambda\dot{z}=-a \tag{7}$$

met in het eerste gevale $z=x$ en $a=\lambda v_w$ en in het tweede geval $z=y$ en $a=mg$. Als we (7) oplossen vinden we dus zowel $x(t)$ als $y(t)$. (7) is een niet homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.
Karakteristieke vergelijking:

$$m\mu^2+\lambda\mu=0$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen, $\mu=0$ en $\mu=-\lambda/m$. We vinden dus

$$z_h=Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}+B$$

Particuliere oplossing: $z_p=-\frac{a}{\lambda}t$. De algemene oplossing is dus

$$z=z_h+z_p=Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}+B-\frac{a}{\lambda}t$$

Met als eerste beginvoorwaarde $z(t=0)=0$ vinden we $A=-B$. Met als tweede beginvoorwaarde $\dot{z}(t=0)=v_{z,0}$ hebben we:

$$\begin{aligned} v_{z,0} &= -\frac{\lambda}{m}A-\frac{a}{\lambda} \\ &\Downarrow \\ A &= -\frac{m}{\lambda}\left(v_{z,0}+\frac{a}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

zodat we vinden

$$z=\frac{m}{\lambda}\left(v_{z,0}+\frac{a}{\lambda}\right)\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)-\frac{a}{\lambda}t \tag{8}$$

Als we $z=x$, $a=\lambda v_w$ en $v_{z,0}=v_0\cos\alpha$ stellen in (8) dan vinden we:

$$x(t)=\frac{m}{\lambda}\left(v_0\cos\alpha+v_w\right)\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)-v_wt$$

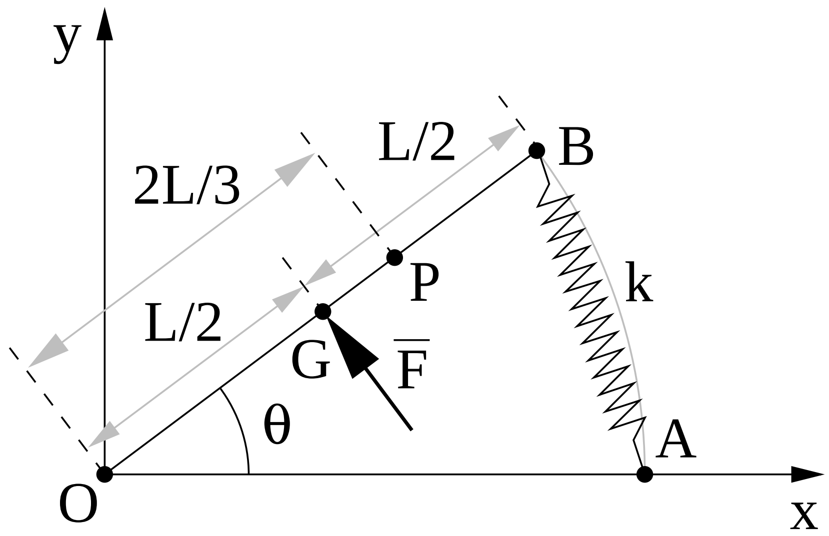
Analoog (met $z=y$, $a=mg$ en $v_{z,0}=v_0\sin\alpha$):

$$y(t)=\frac{m}{\lambda}\left(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{\lambda}\right)\left(1-e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)-\frac{mg}{\lambda}t$$

3. De massa bereikt haar hoogste punt als $\dot{y} = 0$. We hebben dus:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(v_0 \sin\alpha + \frac{mg}{\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{m} t_{max}} - \frac{mg}{\lambda} \\
&\Downarrow \\
-\frac{\lambda}{m} t_{max} &= \ln\left(\frac{mg}{\lambda v_0 \sin\alpha + mg}\right) \\
&\Downarrow \\
t_{max} &= -\frac{m}{\lambda} \ln\left(\frac{mg}{\lambda v_0 \sin\alpha + mg}\right) \\
&= \frac{m}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0 \sin\alpha}{mg}\right)
\end{aligned}$$

Vraag 4



Een homogene staaf met massa *m* en lengte *L* is in *O* scharnierend opgehangen in het horizontale *xy*-vlak. De punten *A* en *B* zijn verbonden met een massaloze lineaire veer met veerconstante *k* en rustlengte $L_0 = 0$. In het massamiddelpunt *G* wordt, steeds loodrecht op de staaf, een kracht uitgeoefend met constante grootte F.

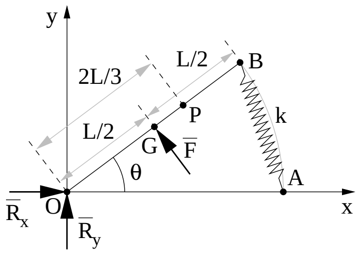
De scharnier mag wrijvingsloos verondersteld worden en de zwaartekracht moet niet in rekening gebracht worden.

De beweging van de deur wordt gedempt door wrijving met de lucht. De wrijvingskracht is recht evenredig met de snelheid van het massamiddelpunt *G* (met evenredigheidsconstante λ), maar heeft een tegengestelde zin. Deze kracht grijpt aan in het punt *P*, op afstand $2L/3$ van de oorsprong *O*.

Bepaal met de *algemene stellingen* de reactiekrachten (als functie van θ, $\dot{\theta}$ en $\ddot{\theta}$) en de bewegingsvergelijking.

Veel succes!!!

Oplossing



- Stelling algemene resultante:

$$m\frac{d\mathbf{v_G}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{totaal}} \tag{9}$$

We moeten dus eerst $\mathbf{v_G}$ berekenen:

$$\begin{aligned}
\overline{OG} &= \left(\frac{L}{2}\cos\theta, \frac{L}{2}\sin\theta\right) \\
&\Downarrow \quad \mathbf{v_G} = \frac{d\overline{OG}}{dt} \\
\mathbf{v_G} &= \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}, \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)
\end{aligned}$$

Voor $\mathbf{F}_{\text{totaal}}$ hebben we

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{totaal}} &= \mathbf{F} + \mathbf{R_x} + \mathbf{R_y} - \lambda\mathbf{v_G} + \mathbf{F}_{\text{veer}} \\
&= \mathbf{F} + \mathbf{R_x} + \mathbf{R_y} - \lambda\mathbf{v_G} + k\overline{BA} \\
&\Downarrow \quad \overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = (L - L\cos\theta, -L\sin\theta) \\
\mathbf{F}_{\text{totaal}} &= (-F\sin\theta, F\cos\theta) + (R_x, R_y) - \lambda\left(-\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}, \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right) + k\,(L - L\cos\theta, -L\sin\theta)
\end{aligned}$$

(9) wordt dus

$$\begin{aligned}
-m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - m\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} &= -F\sin\theta + R_x + \lambda\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} + k\,(L - L\cos\theta) \\
-m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} &= F\cos\theta + R_y - \lambda\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} - kL\sin\theta
\end{aligned}$$

Hieruit volgen onmiddellijk de reactiekrachten als functie van θ, $\dot{\theta}$ en $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
R_x &= -m\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - m\frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta} + F\sin\theta - \lambda\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} - k\,(L - L\cos\theta) \\
R_y &= -m\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + m\frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta} - F\cos\theta + \lambda\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + kL\sin\theta
\end{aligned}$$

- Stelling van het kinetisch moment (geschreven in O):

$$I\ddot{\theta} = F \cdot \frac{L}{2} - \lambda \frac{L}{2}\dot{\theta} \cdot \frac{2L}{3} + \left(\overline{OA} \times k\overline{BA}\right)_z$$

Hierin geldt

$$\begin{aligned} \overline{OA} \times k\overline{BA} &= k \begin{vmatrix} \mathbf{1_x} & \mathbf{1_y} & \mathbf{1_z} \\ L & 0 & 0 \\ L - L\cos\theta & -L\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(0, 0, -kL^2 \sin\theta\right) \end{aligned}$$

en

$$I = \rho \int_0^L x^2 dx = \rho \frac{L^3}{3} = m\frac{L^2}{3}$$

We vinden dus als bewegingsvergelijking:

$$m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} = F \cdot \frac{L}{2} - \lambda \frac{L}{2}\dot{\theta} \cdot \frac{2L}{3} - kL^2 \sin\theta$$