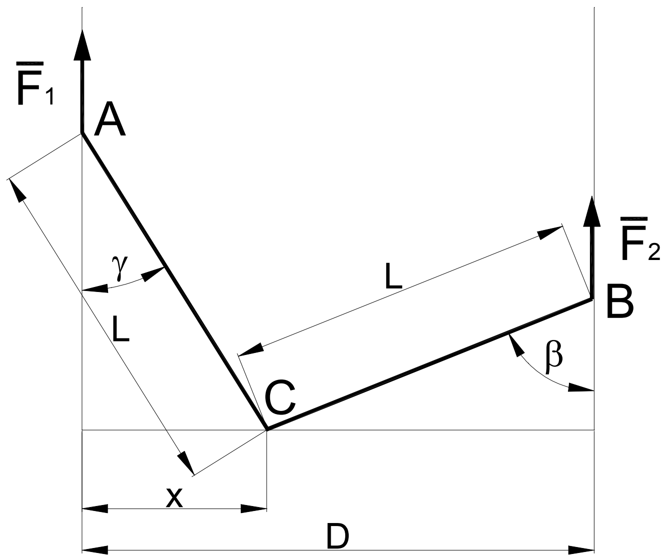
VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL
FACULTEIT TOEGEPASTE WETENSCHAPPEN
ANALYTISCHE MECHANICA I
Tentamen 1ste Kandidatuur Burgerlijk Ingenieur
Academiejaar 2002-2003
24 januari 2003

<u>Vraag 2:</u>



Bovenstaand stelsel bestaat uit twee identieke staven, **AC** en **BC,** met lengte **L**. Deze twee staven zijn onderling verbonden door middel van een scharnier in het punt **C**.

Staaf **AC** is in punt **A** verbonden met een **gladde** vertikale wand door middel van een roloplegging en staaf **BC** is op dezelfde wijze verbonden met een tweede **gladde** vertikale wand in punt **B**. Het scharnierpunt **C** is verbonden door middel van een roloplegging met een **gladde** horizontale vloer tussen de twee vertikale wanden die zich op een afstand **D** van elkaar bevinden.

In de punten **A** en **B** grijpt respectivelijk een vertikale constante kracht $\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}$ en $\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}$ aan.

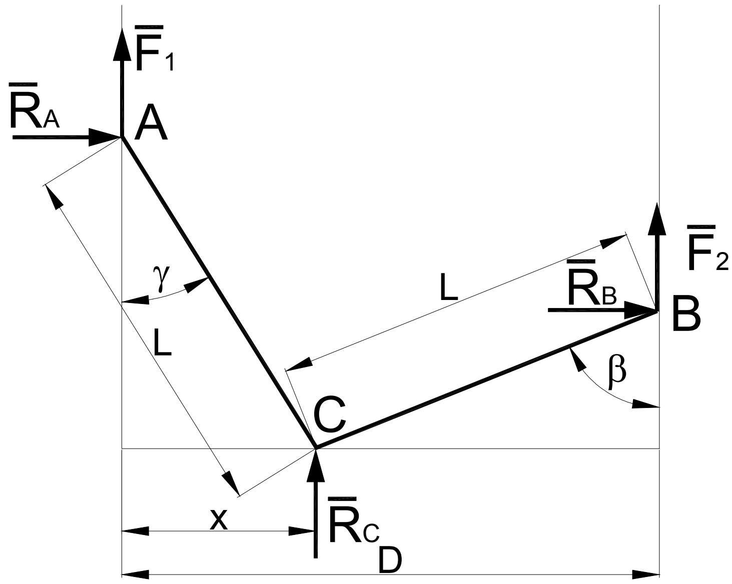
X beschrijft de horizontale afstand tussen de vertikale wand door **A** en het scharnierpunt **C**.

De massa van de staven mogen verwaarloosd worden.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden van dit systeem.
2. Duidt de uitwendige reaktiekrachten aan op de tekening.
3. Bepaal de evenwichtsbetrekking voor de afstand **X** in functie van $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, **L, D** en bepaal de grootte van de uitwendige reaktiekrachten in de punten **A**, **B**, en **C** in functie van $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, **L, D** en **X**. **Gebruik hiervoor de methode van het uitdrukken van de evenwichtsvoorwaarden** ($\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}\,;\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$).

Vraag 2 oplossing:



1. Aantal vrijheidsgraden: 3+3-2-1-1-1=1
2. zie tekening
3.

$$\overline{R} = 0 \qquad \begin{cases} R_A + R_B = 0 & (1) \\ F_1 + F_2 + R_C = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\overline{C}_c^{tot} = 0 \qquad -R_A L\cos\gamma - F_1 L\sin\gamma + F_2 L\sin\beta - R_B L\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

$$\overline{C}_c^{Linkerstaaf} = 0 \qquad -R_A L\cos\gamma - F_1 L\sin\gamma = 0 \qquad (4)$$

verband tussen x, γ en β:

$$L\sin\gamma = x \qquad \Rightarrow \qquad \cos\gamma = \sqrt{1-(\frac{x}{L})^2} \qquad (5)$$

$$L\sin\beta = D - x \qquad \Rightarrow \qquad \cos\beta = \sqrt{1-(\frac{D-x}{L})^2} \qquad (6)$$

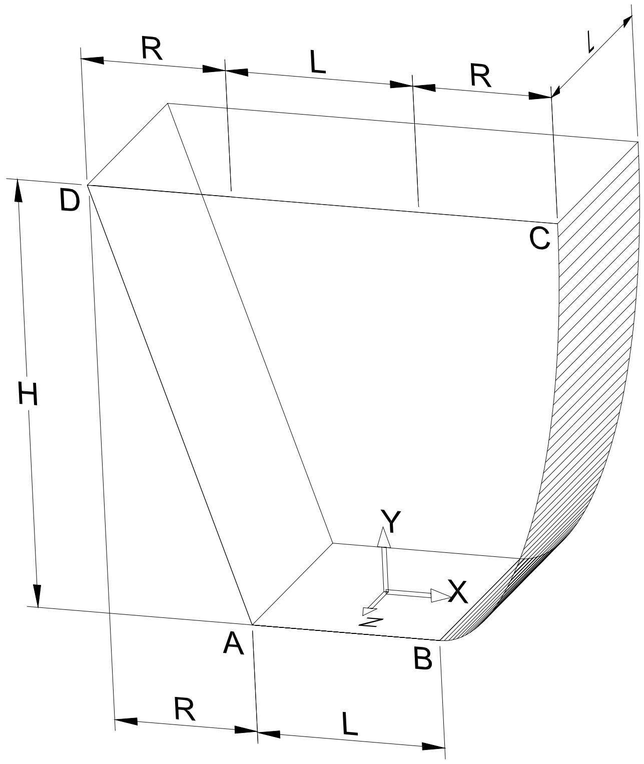
$$(4) \text{ en } (5) \quad \Rightarrow \quad R_A = -\frac{F_1 x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \qquad (7)$$

$$(1) \text{ en } (7) \quad \Rightarrow \quad R_B = -R_A = \frac{F_1 x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \qquad (8)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad R_C = -F_1 - F_2 \qquad (9)$$

$$(3), (4), (6) \text{ en } (8) \quad \Rightarrow \quad F_2(D-x) - \frac{F_1 x}{\sqrt{L^2 - x^2}}\sqrt{L^2 - (D-x)^2} = 0 \qquad (10)$$

Vraag 3:



In bovenstaande tekening is een **homogeen** voorwerp (te beschouwen als volume) weergegeven met massadichtheid ρ.

Een **X**,**Y**,**Z-**assenstelsel ligt met zijn oorsprong in het midden van het grondvlak van het voorwerp waarbij de X-as en de Z-as in dit grondvlak gelegen zijn en de Y-as er loodrecht op.

Het voorwerp heeft een constante dikte **L** volgens de Z-richting en de vorm van het voorwerp is bepaald door het zijvlak **ABCD**. Dit vlak **ABCD** is samengesteld uit volgende stukken:

- Een horizontale (volgens X-richting) lijn **AB** met lengte **L**.
- Een kwart ellips **BC** waarvan de kleine halve as **R** en de grote halve as **H** bedraagt.
- Een horizontaal lijnstuk **CD** met lengte **2R+L**.
- Een schuine lijn **DA** die de figuur terug sluit.

Cijfergegevens: $\mathbf{R = L = 1\,m \; ; \; H = 2\,m \; ; \; \rho = 7000\,kg/m^3}$

Gevraagd:
Bepaal a.d.h.v. symmetrie elementen en/of de stelling van Guldin en/of rechtstreekse integratie het massamiddelpunt van dit voorwerp in het gegeven assenstelsel.

Volgende gegevens kunnen **eventueel** nuttig zijn:

- Oppervlakte van een ellips met halve grote assen a en b: $\mathbf{S = \pi ab}$
- Oppervlakte van een bol met straal r : $\mathbf{S = 4\pi r^2}$
- Volume van een bol met straal r : $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$
- Volume van een kegel met hoogte h en straal van het grondvlak r : $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$
- Volume van een ellipsoïde met drie halve assen a, b en c : $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi abc}$

<u>Vraag 3 oplossing:</u>

Het **XY-vlak** is een symmetrievlak dus is $\mathbf{Z_G=0}$

Voor de ander twee coördinaten volstaat het om het massamiddelpunt van het vlak **ABCD** te bepalen.

Dit vlak splitsen we op in drie delen:

1. Driehoek
2. Rechthoek
3. Kwart ellips

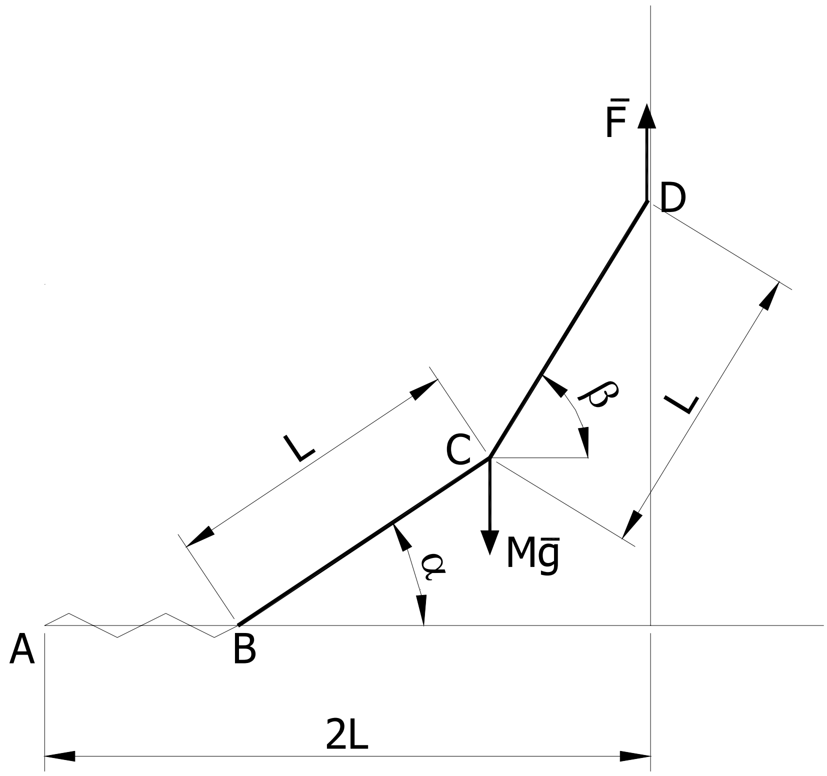
1. Massamiddelpunt van een homogene rechthoekige driehoek met basis **b** en hoogte **h** door toepassing van de stelling van guldin door omwenteling rond de hoogte
$$\frac{1}{3}\pi b^2 h = 2\pi \frac{bh}{2} x_G \qquad \Rightarrow \qquad x_G = \frac{b}{3}$$
Andere coördinaat analoog
2. Massamiddelpunt van een homegene rechthoek ligt in het midden van de figuur wegens symmetrie
3. Massamiddelpunt van een homogene kwart ellips met halve assen **a** en **b** door toepassing van de stelling van guldin door omwenteling rond halve as **a**
$$\frac{2}{3}\pi abb = 2\pi \frac{\pi ab}{4} x_G \qquad \Rightarrow \qquad x_G = \frac{4b}{3\pi}$$
Andere coördinaat analoog.

Samenstelling van de drie onderdelen:

$$x_G = \frac{-\frac{RH}{2}(\frac{L}{2}+\frac{R}{3}) + LH(0) + \frac{\pi RH}{4}(\frac{L}{2}+\frac{4R}{3\pi})}{\frac{RH}{2} + LH + \frac{\pi RH}{4}}$$

$$y_G = \frac{-\frac{RH}{2}(H-\frac{H}{3}) + LH(\frac{L}{2}) + \frac{\pi RH}{4}(H-\frac{4H}{3\pi})}{\frac{RH}{2} + LH + \frac{\pi RH}{4}}$$

Vraag 4:



Bovenstaand stelsel bestaat uit twee identieke **massaloze** staven, **BC** en **CD,** met lengte **L**. De twee staven zijn onderling verbonden door een scharnier in het punt **C**.

Staaf **BC** is verbonden met een **gladde** horizontale vloer in het punt **B** door middel van een roloplegging en staaf **CD** is op dezelfde wijze verbonden met een **gladde** vertikale wand in het punt **D**.
De vertikale wand ligt op een horizontale afstand **2L** van het punt **A** dat zich op de horizontale vloer bevindt.

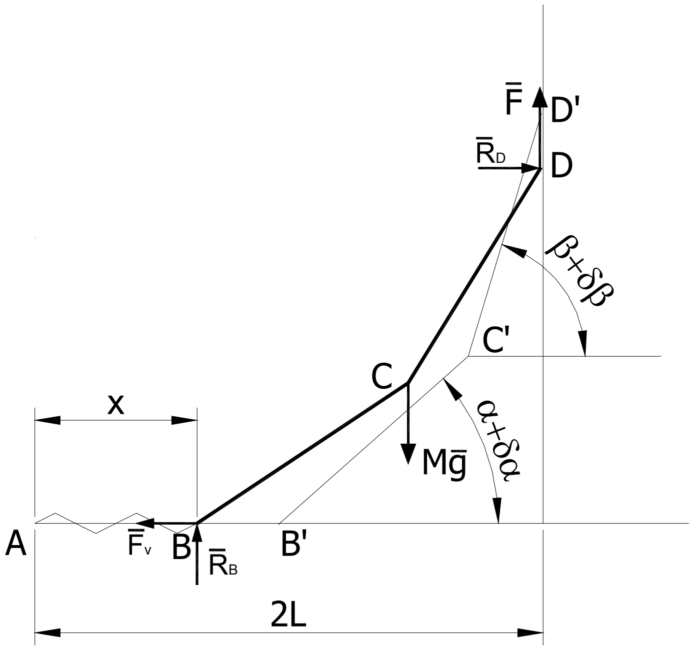
In het punt **B** grijpt een kracht aan afkomstig van een lineaire veer die tussen de punten **A** en **B** gespannen is. Deze veer heeft veerconstante **k** en rustlengte nul. (de grootte van de kracht die de veer genereerd is dus $\mathbf{k}\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$)
In het punt **C** hangt een massa in het zwaarteveld met massa **M** en in het punt **D** grijpt een constante vertikale kracht $\overline{\mathbf{F}}$ aan.

α en β beschrijven de hoek tussen de horizontale en respectievelijk staven **BC** en **CD**.

Gevraagd:

1. Bepaal het aantal vrijheidsgraden van dit systeem.
2. Duidt de uitwendige reaktiekrachten aan op de tekening.
3. Bepaal met de **methode van de virtuele arbeid** de waarden van de veerconstante **k** en de grootte van de kracht $\overline{\mathbf{F}}$ bij evenwicht in functie van **α, β**, **L**, **M** en **g**.

Vraag 4:



1. Aantal vrijheidsgraden: 3+3-1-2-1=2
2. zie tekening
3. we voeren even coördinaat **x** in.

   de arbeidsvergelijking voor de verplaatsing op de tekening wordt:

   $$\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}.\overline{\mathbf{BB'}}+\mathbf{M}\overline{\mathbf{g}}.\overline{\mathbf{CC'}}+\overline{\mathbf{F}}.\overline{\mathbf{DD'}}=\overline{\mathbf{0}}$$

   met (assenstelsel met x-as horizontaal en oorsprong in vast punt **A**)

   $$\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}=(-\mathbf{kx},\mathbf{0}) \qquad \mathbf{M}\overline{\mathbf{g}}=(\mathbf{0},-\mathbf{Mg}) \qquad \overline{\mathbf{F}}=(\mathbf{0},\mathbf{F})$$

   $$\overline{\mathbf{OB}}=(\mathbf{x}\ ,\mathbf{0}) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{BB'}}=(\delta\mathbf{x},\mathbf{0})$$

   $$\overline{\mathbf{OC}}=(\quad ,\mathbf{L}\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{CC'}}=(\quad ,\mathbf{L}\cos\alpha\delta\alpha)$$

   $$\overline{\mathbf{OD}}=(\quad ,\mathbf{L}\sin\alpha+\mathbf{L}\sin\beta) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{DD'}}=(\quad ,\mathbf{L}\cos\alpha\delta\alpha+\mathbf{L}\cos\beta\delta\beta)$$

   verband tussen **x**, α en β:

   $$\mathbf{x}=\mathbf{2L}-\mathbf{L}\cos\alpha-\mathbf{L}\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{x}=\mathbf{L}\sin\alpha\delta\alpha+\mathbf{L}\sin\beta\delta\beta$$

   uitwerking van de arbeidsvergelijking geeft:

   $$-\mathbf{kx}\delta\mathbf{x}-\mathbf{MgL}\cos\alpha\delta\alpha+\mathbf{F}(\mathbf{L}\cos\alpha\delta\alpha+\mathbf{L}\cos\beta\delta\beta)=\mathbf{0}$$

   $$\Rightarrow$$

   $$-\mathbf{k}(\mathbf{2L}-\mathbf{L}\cos\alpha-\mathbf{L}\cos\beta)(\mathbf{L}\sin\alpha\delta\alpha+\mathbf{L}\sin\beta\delta\beta)$$
   $$-\mathbf{MgL}\cos\alpha\delta\alpha+\mathbf{F}(\mathbf{L}\cos\alpha\delta\alpha+\mathbf{L}\cos\beta\delta\beta)=\mathbf{0}$$

groeperen naar $\delta\alpha$ en $\delta\beta$ en beide coëfficiënten nul stellen omdat $\delta\alpha$ en $\delta\beta$ onafhankelijk en willekeurig klein zijn:

$$\begin{cases} -k(2L - L\cos\alpha - L\cos\beta)L\sin\alpha - MgL\cos\alpha + FL\cos\alpha = 0 & (1) \\ -k(2L - L\cos\alpha - L\cos\beta)L\sin\beta + FL\cos\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\sin\beta - (2)\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{Mg\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (3)$$

$$(2)\text{ en }(3) \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{Mg\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)(2-\cos\alpha-\cos\beta)}$$